

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

B. FRANCHI

PARAPRODOTTO E APPLICAZIONI

17 GENNAIO-24 GENNAIO 1985.

In questo seminario esporremo alcune tecniche che sono state sviluppate per trattare equazioni differenziali lineari con coefficienti non regolari ed equazioni non lineari; si tratta in sostanza di costruire operatori che svolgano un ruolo analogo a quello degli operatori pseudodifferenziali nel caso lineare C^∞ . Un primo tentativo in questo senso è costituito dagli operatori introdotti da R.R. Coifman e Y. Meyer in [C/M] per lo studio di certi integrali singolari (integrali di Calderón); per tali operatori non è però stato possibile sviluppare un calcolo simbolico analogo al calcolo pseudodifferenziale usuale. Questo punto di vista è stato ripreso da J.M. Bony [B1] in connessione a problemi non lineari adattando l'idea di paraprodotto introdotto da A. Calderón. Bony definisce una classe di operatori (gli operatori paradifferenziali) per i quali sviluppa un calcolo simbolico e che utilizza per "paralinearizzare" equazioni non lineari.

Nella prima parte di questo seminario descriveremo il calcolo di Bony; successivamente mostreremo come queste tecniche permettano di provare una caratterizzazione degli operatori integrali singolari L^2 -continui. Notiamo che questo risultato (G. David e J.L. Journé) permette di riottenere la L^2 -continuità degli integrali di Calderón.

1. PARAPRODOTTO E OPERATORI PARADIFFERENZIALI

1.1. Daremo ora una prima definizione di paraprodotto. Premettiamo alcune definizioni e alcuni richiami.

Se $\mu \in]0,1[$, denoteremo con $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$[u]_{\mu} = \sup_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\mu}} < +\infty$$

Muniremo $C^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ della norma

$$\|u\|_{C^{\mu}} = \|u\|_{L^{\infty}} + [u]_{\mu}.$$

Se poi $m \in \mathbb{N}$ e $\mu \in]0, 1[$, denoteremo con $C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni u tali che $D^{\alpha}u \in C^{\mu}(\mathbb{R}^n) \forall \alpha, |\alpha| \leq m$ munito della norma

$$\|u\|_{C^{m+\mu}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}} + \sum_{|\alpha|=m} [D^{\alpha}u]_{\mu}.$$

Inoltre $C_0^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ denoterà il sottospazio delle funzioni a supporto compatto.

Osserviamo esplicitamente che non abbiamo definito lo spazio $C^s(\mathbb{R}^n)$ per $s \in \mathbb{Z}, s \geq 0$; la definizione richiede infatti alcune modificazioni analoghe a quelle che si utilizzano per gli spazi di Besov.

Sia ora $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ una funzione radiale non negativa tale che $\phi(\xi) \equiv 1$ per $|\xi| \leq 1/2$ e $\phi(\xi) \equiv 0$ per $|\xi| \geq 1$. Denotiamo con S_k l'operatore da S' a S' definito da

$$F(S_k u)(\xi) = \phi\left(\frac{\xi}{2^k}\right) (Fu)(\xi),$$

dove F denota la trasformata di Fourier.

Indicando con Δ_k l'operatore $S_{k+1} - S_k$, risulta

$$u = S_0 u + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k u$$

Proposizione 1.1.1. Una funzione $u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ appartiene a

$C^\mu(\mathbb{R}^n)$ ($\mu > 0$ non intero) se e solo se esiste $C > 0$ tale che
 $\|\Delta_k u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-\mu k}$, $k \in \mathbb{N}$. Se inoltre $0 < \mu < m \in \mathbb{N}$ e se le funzioni
 $g_k \in C^\infty$ sono tali che $\|D_{g_k}^\alpha\|_{L^\infty} \leq C 2^{k(|\alpha|-\mu)}$ se $|\alpha| \leq m$, allora $\sum_k g_k \in C^\mu$.

Possiamo ora dare la prima definizione di paraprodotto.

Definizione 1.1.2. Se $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$, $\mu \in \mathbb{R}_+^n$, poniamo

$$\pi(a, u) = \sum_{k=2}^{\infty} S_{k-2}(a) \Delta_k(u)$$

(paraprodotto di a e u).

(Se $\check{\phi} = F^{-1}\phi$, osserviamo che $S_k(a) = 2^{kn} \check{\phi}(2^k \cdot) * a$, e quindi

$$\|S_k(a)\|_{L^\infty} \leq \|2^{kn} \check{\phi}(2^k \cdot)\|_{L^1} \|a\|_{L^\infty} = \|\phi\|_{L^1} \|a\|_{L^\infty} = C_\phi \|a\|_{L^\infty};$$

dunque, per la Proposizione 1.1.1., la serie scritta converge geometricamente).

Questa definizione è modellata sugli spazi C^s ; più avanti, trattando altri spazi, utilizzeremo una definizione (in un senso conveniente) equivalente. Proveremo inoltre che la definizione stessa è indipendente (ancora in un senso conveniente) dalla scelta della funzione ϕ .

Richiamiamo ora alcune proprietà del paraprodotto che possono illustrare il significato della definizione. Si ha:

Proposizione 1.1.3. ([B1], Teorema 2.1). Se $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'operatore $\Pi(a, \cdot)$ applica C^s in C^s ($s > 0$, $s \notin \mathbb{N}$) e H^s in H^s con norma maggiorata da $\text{cost.} \|a\|_\infty$.

Proposizione 1.1.4. ([B1], Teorema 2.3). Se $a, b \in C^0$ ($\rho > 0$, $\rho \notin \mathbb{N}$), allora $\Pi(a, \cdot) \circ \Pi(b, \cdot) - \Pi(ab, \cdot)$ applica C^s in

$C^{s+\rho}$ ($s > 0$, $s, s+\rho \notin \mathbb{N}$) e H^s in $H^{s+\rho}$ con norma maggiorata da
 cost. $\|a\|_{C^\rho} \|b\|_{C^\rho}$.

Proposizione 1.1.5. ([B1], Teorema 2.5). i) Siano $a \in C^0$ e
 $u \in C^\sigma$ a supporto compatto ($\rho, \sigma > 0$, $\rho, \sigma, \rho + \sigma \notin \mathbb{N}$). Allora

$$au = \Pi(a, u) + \Pi(u, a) + r,$$

con $\|r\|_{C^{\rho+\sigma}} \leq \text{cost.} \|a\|_{C^\rho} \|u\|_{C^\sigma}$.

ii) Siano $a \in H^s$ ($s > n/2$) e $u \in H^t$ ($t > n/2$) a supporto compat-
 to. Allora $\forall \varepsilon > 0$

$$au = \Pi(a, u) + \Pi(u, a) + r,$$

con $\|r\|_{H^{s+t-n/2-\varepsilon}} \leq C_\varepsilon \|a\|_{H^s} \|u\|_{H^t}$.

Una proprietà fondamentale del paraprodotto è la seguente for-
 mula di Bony che condurrà alla "paralinearizzazione" delle equazioni non
 lineari.

Proposizione 1.1.6. Siano $F \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $u \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$, $\mu > 0$,
 $\mu, 2\mu \notin \mathbb{N}$. Allora

$$(1.1.6.a) \quad F(u) - \Pi(F'(u), u) \in C^{2\mu}.$$

Analogamente, se $s > n/2$, $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e $F(0) = 0$, allora

$$(1.2.6.b) \quad F(u) - \Pi(F'(u), u) \in \bigwedge_{1,1}^{2s} \subseteq H^{2s-n/2} \quad (*) (**).$$

(*) Per la definizione dello spazio di Besov $\bigwedge_{1,1}^{2s}$, si veda, ad esempio, [M2]

(**) Per la dimostrazione della osserzione negli spazi holderiani, si veda,

Più in generale, se $F(x,y)$ è C^∞ su $R^n \times R^N$, limitata con tutte le sue derivate su ogni insieme $R^n \times K$, K compatto di R^N e $u_1, \dots, u_N \in C^\mu(R^n)$ ($\mu, 2\mu \notin N$), si ha:

$$(1.2.6.c) \quad F(x, u_1(x), \dots, u_N(x)) - \sum_{j=1}^N \Pi \left(\frac{\partial F}{\partial y_j}(x, u_1, \dots, u_N), u_j \right) \in C^{2\mu}$$

L'asserzione viene poi modificata come sopra nel caso degli spazi di Sobolev.

Accenniamo la dimostrazione della (1.2.6.a). Per prima cosa, osserviamo che, se $v \in C^S$, $w \in C^\sigma$, allora $\Pi(v,w) - \sum_{k=0}^{\infty} S_k(v) \Delta_k(w) \in C^{S+\sigma}$;

dunque basterà provare che $F(u) - \sum_{k=0}^{\infty} S_k(F'(u)) \Delta_k(u) \in C^{2\mu}$. Poniamo

allora $u_k = S_k(u)$ e $v_k = \Delta_k(u) = u_{k+1} - u_k$. Allora

$$\begin{aligned} F(u) &= F(u_0) + (F(u_1) - F(u_0)) + (F(u_2) - F(u_1)) + \dots = \\ &= F(u_0) + (F(u_0 + v_0) - F(u_0)) + (F(u_1 + v_1) - F(u_1)) + \dots = \\ &= F(u_0) + v_0 F'(u_0) + \text{errore} + v_1 F'(u_1) + \text{errore} + \dots = \\ &= F(u_0) + v_0 S_0(F'(u)) + \text{errore} + v_1 S_1(F'(u)) + \text{errore} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v_k S_k(F'(u)) + \text{errori}. \end{aligned}$$

Ora gli errori costituiscono due serie: la prima

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k, \quad \text{dove } R_k = F(u_k + v_k) - F(u_k) - v_k F'(u_k),$$

./ ad esempio, [ME] XI, Teorema 14. La parte negli spazi di Sobolev è dovuta a Y. Meyer ([M1]), Teorema 2 e [M2].

la seconda $\sum_{k=0}^{\infty} v_k \rho_k$, dove $\rho_k = S_k(F'(u)) - F'(S_k(u))$. E' possibile allora verificare che $\|D^\alpha R_k\|_{L^\infty} \leq C 2^{(|\alpha|-2\mu)k}$ e che un'analogha stima vale per $\|D^\alpha(\rho_k v_k)\|_{L^\infty}$ (questa è la parte più delicata della dimostrazione). Dunque (si veda ad esempio [ME] X, Lemma 3) ciascuna delle due serie appartiene a $C^{2\mu}$.

I risultati precedenti possono chiarire il significato dal termine "paraprodotto": infatti $\Pi(a,u)$ è, per le Proposizioni 1.1.5. e 1.1.3. "la metà del prodotto di a e di u che conserva la regolarità di u" modulo un errore di regolarità superiore. Inoltre, la (1.1.6.c) asserisce in particolare che, se $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$, allora $\Pi(a,u) = au + \text{errore}$, dove l'errore ha regolarità 2μ mentre $\Pi(a,u)$ ha regolarità μ .

1.2. Ricordiamo che $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n)$ ($m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \rho, \delta \leq 1$) denota lo spazio delle funzioni $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tali che per ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, per ogni $\alpha, \beta \in N_0^n (= (N\{0\})^n)$ esiste $C = C(K, \alpha, \beta)$ tale che

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C(1+|\xi|)^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|}$$

A p si può associare l'operatore $P(x,D)$ dato da

$$p(x,D)u = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} p(x, \xi) u(\xi) d\xi$$

se $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Se $\delta < 1$, P si prolunga con continuità da $E'(\mathbb{R}^n)$ a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e si ha il seguente risultato fondamentale.

Teorema 1.2.1. (Calderon-Vaillancourt). Sia $p \in S_{\rho,\rho}^0(\mathbb{R}^n)$,

$0 \leq \rho < 1$. Allora $p(x,D)$ è continuo da $L^2(\mathbb{R}^n)$ a $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Nel caso $\rho = 1$ l'asserto non è però, in generale, vero. Osserviamo che dal Teorema 1.2.1 discende la L^2 -continuità per l'operatore $p(x,D)$ se $p \in S^0_{\rho,\delta}$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$.

Nel seguito supporremo per semplicità che le stime che intervengono siano uniformi su \mathbb{R}^n , cioè che la costante $C(K,\alpha,\beta)$ sia indipendente da K .

Per quanto riguarda la classe $S^0_{1,1}(\mathbb{R}^n)$ è possibile provare il risultato seguente (si veda, ad esempio, [ME]X, Teorema 6).

Teorema 1.2.2. (E. Stein). Sia $p \in S^0_{1,1}$; allora $p(x,D)$ è continuo da $H^s(\mathbb{R}^n)$ a $H^s(\mathbb{R}^n)$ per ogni $s > 0$ e da $C^s(\mathbb{R}^n)$ a $C^s(\mathbb{R}^n)$ per ogni $s > 0$ non intero.

Per definire gli operatori paradifferenziali di J.M. Bony introdurremo ora alcune sottoclassi di $S^m_{1,1}$ che definiscono operatori L^2 -continui.

Definizione 1.2.3. Denotiamo con \sum_0^m l'insieme delle funzioni $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tali che

$$(1.2.3.a) \quad \forall \beta \in \mathbb{N}_0^n, \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, |D_\xi^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_\beta (1+|\xi|)^{m-|\beta|}$$

(1.2.3.b) esiste $\epsilon < 1$ tale che la trasformata di Fourier in x di σ $\hat{\sigma}(\eta,\xi)$ ha supporto nel cono $|\eta| \leq \epsilon|\xi|$.

Se $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$, denoteremo con \sum_r^m l'insieme delle funzioni $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ che soddisfano (1.2.3.b) e \sum_r^m tali che

$$(1.2.3.c) \quad \forall \beta \in N_0^n, \forall \xi \in R^n, \| D_\xi^\beta(\cdot, \xi) \|_{C^r(R^n)} \leq C_\beta (1+|\xi|)^{m-|\beta|}.$$

Osserviamo che, per la disuguaglianza di Bernstein, se $p \in \sum_0^m$, allora $|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C'_\beta (\epsilon |\xi|)^{|\alpha|} (1+|\xi|)^{m-|\beta|} \leq C'_\beta (1+|\xi|)^{m+|\alpha|-|\beta|}$. Si hanno dunque le inclusioni

$$\sum_r^m \subseteq \sum_0^m \subseteq S_{1,1}^m$$

Ai simboli di \sum_0^0 si applica quindi il Teorema 1.2.2. Ma si ha di più il risultato seguente.

Teorema 1.2.4. Se $p \in \sum_0^0$, allora $p(x, D)$ è continuo da L^2 in \mathcal{S}' .

Il Teorema può essere provato direttamente (si veda, ad esempio, [ME]X, Teorema 11); tuttavia lo rioterremo come conseguenza del Teorema di David e Journé sui nuclei singolari (Teorema 2.2.1).

Gli operatori $p(x, D)$, con $p \in \sum_0^m$ verranno detti operatori paradifferenziali; vediamo ora la connessione di questi con il paraprodotto introdotto precedentemente.

Teorema 1.2.5. Sia $\psi = \psi(\eta, \xi)$ una funzione C^∞ su $R^n \times R^n$ tale che, per certi $\epsilon_1, \epsilon_2, R \in R_+, \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$, risulta

$$(1.2.5.a) \quad \psi(\eta, \xi) = 0 \quad \text{se} \quad |\eta| \geq \epsilon_2 |\xi|;$$

$$(1.2.5.b) \quad \psi(\eta, \xi) = 1 \quad \text{se} \quad |\eta| \leq \epsilon_1 |\xi| \quad \text{e} \quad |\xi| \geq R$$

$$(1.2.5.c) \quad \forall \alpha, \beta \in N_0^n \quad |D_\eta^\alpha D_\xi^\beta p(\eta, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1+|\xi|)^{-|\alpha|-|\beta|}$$

$$\forall (\eta, \xi) \in R^{2n}.$$

(osserviamo che è possibile costruire una ψ così fatta). Se $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($a \in C^r(\mathbb{R}^n)$, $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$), allora il simbolo

$$(1.2.5.d) \quad \sigma_a(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\eta x} \psi(\eta, \xi) \hat{a}(\eta) d\eta$$

appartiene a $\sum_0^0 \left(\sum_r^0 \right)$.

Inoltre, se ψ_1 e ψ_2 sono due funzioni che verificano (1.2.5.a)-(1.2.5.c), indicando provvisoriamente con $\sigma_a^{\psi_1}$ e $\sigma_a^{\psi_2}$ i simboli associati ad a tramite ψ_1 e ψ_2 secondo la (1.2.5.d), se $a \in C^r(\mathbb{R}^n)$, $u \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ (r, μ , $r+\mu$ positivi e non interi), risulta

$$\sigma_a^{\psi_1}(x, D)u - \sigma_a^{\psi_2}(x, D)u \in C^{r+\mu}(\mathbb{R}^n)$$

(la definizione data è cioè indipendente da ψ modulo termini r -regolarizzanti).

Teorema 1.2.6. Sia ρ una funzione radiale nonnegativa di classe C^∞ su \mathbb{R}^n tale che $\rho(\xi) \equiv 1$ se $|\xi| \leq 1/2$, $\rho(\xi) \equiv 0$ se $|\xi| \geq 1$. Allora la funzione

$$(1.2.6.a) \quad \psi(\eta, \xi) = \sum_{k=2}^{\infty} \rho(\eta/2^{k-2}) (\rho(\xi)2^{k+1} - \rho(\xi/2^k))$$

soddisfa (1.2.5.a)-(1.2.5.c) (con $\varepsilon_1 = 1/8$, $\varepsilon_2 = 1/2$, $R = 4$) e di più, per ogni $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$(1.2.6.b) \quad \sigma_a(x, D)u = \Pi(a, u).$$

Accenneremo più avanti la dimostrazione di questi Teoremi. Osserviamo che la (1.2.6.b) dice che il paraprodotto con una funzione L^∞ è

un operatore paradifferenziale di ordine zero come il prodotto con una funzione C^∞ è un operatore pseudodifferenziale di ordine zero. Inoltre, dal teorema 1.2.5 segue che, se $a \in C^r$ e $u \in C^\mu$, variando la funzione ϕ nella definizione di paraprodotto, l'errore è $C^{r+\mu}$ e quindi r -regolarizzante in quanto $\Pi(a,u) \in C^\mu$.

Dimostrazione del Teorema 1.2.5. Limitiamoci a provare la prima asserzione; la seconda è più delicata: si veda, ad esempio, [ME] X, Lemma 9.

L'integrale in (1.2.5.d) ha un significato solo formale. Verifichiamo che sono soddisfatte le condizioni della Definizione 1.2.3. La (1.2.3.b) è immediata, in quanto $\sigma_a(n,\xi) = \psi(n,\xi) a(n)$.

Osserviamo ora che, denotata con $G(\cdot, \xi)$ la trasformata di Fourier inversa di $\psi(\cdot, \xi)$, $G(\cdot, \xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e, di più,

$$\forall \beta \in \mathbb{N}_0^n, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad |D_\xi^\beta G(\cdot, \xi)|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_\beta (1+|\xi|)^{-|\beta|}$$

Infatti, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

$$\begin{aligned} |\xi|^\alpha |y^\alpha D_\xi^\beta G(y, \xi)| &= |\xi|^\alpha \left| \int e^{iy\eta} D_\eta^\alpha D_\xi^\beta \psi(\eta, \xi) d\eta \right| \leq \\ &\leq (\text{per (1.2.5.a) e (1.2.5.c)}) C'_{\alpha, \beta} |\xi|^{n+\alpha} (1+|\xi|)^{-|\alpha|-|\beta|} \leq \\ &\leq C'_{\alpha, \beta} |\xi|^n (1+|\xi|)^{-|\beta|}; \end{aligned}$$

sommando per $|\alpha| \leq n+1$ si ha allora

$$|D_\xi^\beta G(y, \xi)| \leq C'_\beta \frac{|\xi|^n}{(1+|y||\xi|)^{n+1}} (1+|\xi|)^{-|\beta|},$$

da cui l'asserto. Si può allora scrivere (e l'integrale converge)

$$\sigma_a(x, \xi) = \int a(n-y) G(y, \xi) dy$$

Dunque la (1.2.3.a) segue immediatamente.

Dimostrazione del Teorema 1.2.6. Osserviamo che per ogni $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, la serie in (1.2.6.a) ha al più tre termini non nulli, corrispondenti agli indici k tali che $|\eta| \leq 2^{k-2}$ e $2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}$; la verifica di (1.2.5.a)-(1.2.5.c) è immediata. Per provare (1.2.6.b), basterà supporre $u \in S$ e $a \in L^\infty$. Per semplicità, denotiamo con ϕ_k la funzione $\phi(\cdot/2^k)$ e con θ_k la funzione $\phi_{k+1} - \phi_k$; denotiamo inoltre con $\check{\phi}_k$ la trasformata di Fourier inversa di ϕ_k . Si ha:

$$S_k(a)(x) = \int dy \check{\phi}_k(x-y) a(y) dy$$

$$(\Delta_k u)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \theta_k(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi;$$

dunque

$$(S_{k-2}(a)\Delta_k(u))(x) = (2\pi)^{-n} \int d\xi e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) \cdot$$

$$\cdot \int dy \check{\phi}_k(x-y) a(y) \theta_k(\xi) = (2\pi)^{-n} \int d\xi e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) \sigma_k(x, \xi).$$

Osserviamo che per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ la serie

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{k=2}^{\infty} \sigma_k(x, \xi)$$

ha al più tre termini non nulli; dunque

$$\begin{aligned}\sigma(x, \xi) &= \int dy \theta_k(\xi) \sum_{k=2}^{\infty} \phi_k(x-y) a(y) = \\ &= \int dy \Gamma(x-y, \xi) a(y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Poiché } |\sigma_k(x, \xi)| &\leq \|\phi_k\|_{L^1} \|a\|_{L^\infty} \|\theta_k\|_{L^\infty} \leq 2 \|\phi_k\|_{L^1} \|\phi_k\|_{L^\infty} \|a\|_{L^\infty} = \\ &= 2 \|\phi\|_{L^1} \|\phi\|_{L^\infty} \|a\|_{L^\infty},\end{aligned}$$

per il teorema della convergenza dominate si ha:

$$\begin{aligned}\Pi(a, u)(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} S_k(a) (\Delta_k u)(x) = \\ &= \int d\xi e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) \sigma(x, \xi) = \sigma(x, D)u.\end{aligned}$$

L'asserzione segue allora dal fatto che $\Gamma(\cdot, \xi) = \hat{\psi}(\cdot, \xi)$.

E' possibile comporre gli operatori pseudodifferenziali con operatori di tipo (1,1). Si ha infatti:

Teorema 1.2.7. Sia $\tau \in S_{1,1}^{m'}(\mathbb{R}^n)$ e sia $\sigma \in \sum_r^m$ ($r > 0$ non intero). Allora il simbolo

$$(1.2.7.a) \quad (\tau \# \sigma)(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < r} (-i)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \tau(x, \xi) \partial_x^\alpha \sigma(x, \xi)$$

appartiene a $S_{1,1}^{m+m'}(\mathbb{R}^n)$.

Inoltre, esiste $\rho \in S_{1,1}^{m+m'-r}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\tau(x,D) \circ \sigma(x,D) = (\tau \# \sigma)(x,D) + \rho(x,D).$$

(Osserviamo che, se $q \in S_{1,1}^{m'}(\mathbb{R}^n)$ e $p \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n)$, la composizione $q(x,D)$ o $p(x,D)$ è "buona" nel senso che rispetta le regole del calcolo se $\delta < 1$, ma ciò non è più vero se $\delta = 1$). Per una dimostrazione, si veda [ME], XI, Teorema 19.

1.3. Vediamo ora come è possibile associare a un simbolo poco regolare nelle variabili di spazio un operatore paradifferenziale. Il procedimento è analogo a quello utilizzato per la seconda definizione di paraprodotto.

Definizione 1.3.1. Siano $m \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$. Denoteremo con Γ_r^m lo spazio delle funzioni $p(x,\xi)$, C^∞ in ξ e C^r in x tali che, $\forall \beta \in \mathbb{N}_0^n$ esiste C_β tale che

$$\|D_\xi^\beta p(\cdot, \xi)\|_{C^r} \leq C_\beta (1+|\xi|)^{m-|\beta|}.$$

Se ψ è una funzione come quella del Teorema 1.2.5., poniamo

$$\begin{aligned} (1.3.1.a) \quad \sigma_q(x,\xi) &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\eta x} \psi(\eta,\xi) \beta(\eta,\xi) d\eta = \\ &= (2\pi)^{-n} \int G(y,\xi) p(x-y,\xi) dy, \end{aligned}$$

dove $G(\cdot, \xi) = F^{-1}(\psi(\cdot, \xi))$.

Come nel caso del paraprodotto ($p(x,\xi) = a(x)$) si ha

$$\sigma_p \in \sum_r^m.$$

Teorema 1.3.2. (Calcolo simbolico). Sia $\rho \in \Gamma_r^m$. Allora

$$\forall \beta \in N_0^n \quad \partial_\xi^\beta p \in \Gamma_r^{m-|\beta|} \text{ e } \sigma_{\partial_\xi^\beta p} - \partial_\xi^\beta \sigma_p \in S_{1,1}^{m-|\beta|-r}.$$

Inoltre, se $|\alpha| < r$, $\partial_x^\alpha p \in \Gamma_r^{m-|\alpha|}$ e $\sigma_{\partial_x^\alpha p} = \partial_x^\alpha \sigma_p$.

Indicheremo con $\tilde{\Gamma}_r^m$ ($m \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $r \notin \mathbb{N}$) lo spazio delle somme

$$p = \sum_{j < r} p_j, \quad p_j \in \Gamma_{r-j}^{m-j}. \text{ Posto allora } \sigma_p = \sum_{j < r} \sigma_{p_j}, \text{ risulta } \sigma_p \in \sum_r^m.$$

Inoltre, se $p = \sum_{j < r} p_j$ appartiene a $\tilde{\Gamma}_r^m$ e $q = \sum_{j < r} q_j$ appartiene a $\tilde{\Gamma}_r^{m'}$,

posto

$$p \neq q \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j+k+|\alpha| < r} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p_j D_x^\alpha q_k,$$

risulta $p \neq q \in \tilde{\Gamma}_r^{m+m'}$ e

$$\sigma_{p \neq q} - \sigma_p \neq \sigma_q \in S_{1,1}^{m+m'-r}(\mathbb{R}^n),$$

dove $\sigma_p \neq \sigma_q$ è stato definito in (1.2.7.a).

Dimostrazione: si vedano, ad esempio, Lemma 24 e Teorema 25 di [ME], X.

Definizione 1.3.3. Diremo che $p \in \tilde{\Gamma}_r^m$ ($m \in \mathbb{R}$, $r > 0$ non intero) è ellittico in \mathbb{R}^n se esistono $R \geq 0$, $C > 0$ tali che

$$(1.3.3.a) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| \geq R, \quad |p(x, \xi)| \geq C(|\xi|)^m.$$

Se $p \in \tilde{\Gamma}_r^m$, si dirà che p è ellittico se p_0 è ellittico.

Con un procedimento analogo a quello che si utilizza per costruire la parametrica di un operatore pseudodifferenziale ellittico usuale, tenendo conto del Teorema 1.3.2. si può provare il seguente risultato (si veda, ad esempio, [ME], XI, Teorema 27).

Teorema 1.3.3. Sia $p \in \tilde{\Gamma}_r^m$ ellittico in \mathbb{R}^n . Allora esistono $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($h(\xi) \equiv 1$ se $|\xi| \geq R + 1$), $q_1, q_2 \in \tilde{\Gamma}_r^{-m}$ tali che

$$p \neq q_1 = q_2 \neq p = h.$$

1.4. Vediamo ora una semplice applicazione delle tecniche descritte precedentemente.

Sia F una funzione C^∞ su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dove $N = \text{card}\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leq m\}$; consideriamo una equazione della forma

$$(1.4.a.) \quad F(x, u(x), \partial_1 u(x), \dots, \partial^\alpha u(x), \dots)_{|\alpha| \leq m} = 0.$$

Denotiamo con $c_\alpha(x)$ la derivata di F rispetto alla variabile occupata dalla derivata di ordine α calcolata nel punto $(x, \partial_1 u(x), \dots)$ e poniamo

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha(x) (i\xi)^\alpha.$$

Tutto ciò è ben definito se $u \in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$, $\mu > 0$ non intero; in tal caso $c_\alpha \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$. Osserviamo inoltre che $p \in \Gamma_\mu^m$.

Teorema 1.4.1. Sia $u \in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ ($\mu > 0$, $\mu, 2\mu$ non interi) soluzione di (1.4.a). Supponiamo che

$$p_0 = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha(x) (i\xi)^\alpha$$

sia ellittico su \mathbb{R}^n . Allora $u \in C^{m+2\mu}(\mathbb{R}^n)$ (e quindi $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$).

Dimostrazione. Il simbolo p è ellittico poiché p_0 lo è. D'altra parte, il simbolo σ_p associato a p è

$$(2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha| \leq m} (i\xi)^\alpha \int e^{i\eta x} \psi(\eta, \xi) \hat{c}_\alpha(\eta) d\eta,$$

per cui (Teorema 1.2.6)

$$\sigma_p(x, D)v = \sum_{|\alpha| \leq m} \pi(c_\alpha, \partial^\alpha v).$$

D'altra parte della (1.2.6.e) (formula di parolinearizzazione) si ha che

$$\begin{aligned} 0 = F(x, u(x), \dots) &= \sum_{|\alpha| \leq m} \Pi(c_\alpha, \partial^\alpha u) + \text{errore } C^{2\mu} = \\ &= \sigma_p(x, D)u + \text{errore } C^{2\mu}, \end{aligned}$$

e dunque $\sigma_p(x, D)u = f \in C^{2\mu}$. Per il Teorema 1.3.3. esiste $q \in \tilde{\Gamma}_\mu^{-m}$ tale che $q \neq p = h(\xi)$, dove $h \equiv 1$ fuori da un compatto. Il simbolo

$$\tau = \sigma_q \sum_\mu^{-m} \subseteq S_{1,1}^{-m}(\mathbb{R}^n), \text{ mentre si può sempre supporre che il simbolo asso}$$

ciato ad h sia h stessa e dunque, per il Teorema 1.3.2., esiste $\rho_1 \in S_{1,1}^{-\mu}$ tale che

$$\tau \neq \sigma_p = \sigma_{q \neq p} + \rho_1 = h + \rho_1 = 1 + h-1 + \rho_1 = 1 + \rho_2,$$

dove $\rho_2 \in S_{1,1}^{-\mu}$, in quanto $h-1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Allora, per il Teorema 1.2.7., esiste $\rho \in S_{1,1}^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\tau(x,D) \circ \sigma_p(x,D) = \text{Id} + \rho(x,D),$$

e dunque

$$\tau(x,D) f = u + \rho(x,D)u,$$

da cui l'asserto.

Le tecniche descritte precedentemente permettono in realtà di ottenere risultati di regolarità in situazioni più generali e in forma microlocale. Consideriamo, ad esempio, il caso di u soluzione dell'equazione quasilineare

$$(1.4.b) \quad \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} A_\alpha(x, u(x), \dots, \partial^\beta u(x), \dots)_{|\beta| \leq |\alpha| - 1} \partial^\alpha u + A_0(x, u(x)) = 0$$

Se $u \in C_{\text{loc}}^\rho$ con $\rho > m - 1/2$, $\rho \notin N(H_{\text{loc}}^s)$ con $s > \max\{n/2 + m - 1, n/4 + m - 1/2\}$ e (x_0, ξ_0) non è caratteristico^(*), allora u è microlocalmente di classe $C^{2\rho - m + 1}(H^{2s - n/2 - m + 1})$ in (x_0, ξ_0) .

Analogamente, se u è soluzione dell'equazione semilineare

$$(1.4.c) \quad \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u + \beta(x, u(x)) = 0,$$

si ha che se $u \in C_{\text{loc}}^\rho$, $\rho > 0$, $\rho \notin N(H_{\text{loc}}^s)$, $s > n/2$ e (x_0, ξ_0) è non ca-

(*) Cioè $\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x_0, u(x_0), \dots) (i\xi_0)^\alpha \neq 0$.

ratteristico^(*), allora u è microlocalmente di classe $C^{2\rho+m}$ ($H^{2s+m-n/2}$) in (x_0, ξ_0) .

Questi risultati sono contenuti nel teorema 5.4 di Bony [B1], tenendo conto di [M1].

Analogamente si possono dare risultati di propagazione delle singolarità ([B1], Teorema 6.1), regolarità microlocale per problemi al contorno, di riflessione delle singolarità nel caso trasverso ([ST]).

Osserviamo infine che tecniche diverse per lo studio microlocale di equazioni non lineari sono utilizzati in [B/R 1] e [B/R 2]. In particolare, in [B/R 2] viene sviluppato un calcolo pseudodifferenziale per simboli "poco regolari" nelle variabili x . Sempre con tecniche diverse in [B2] e [MR] vengono studiate più completamente le singolarità di equazioni iperboliche semilineari del tipo $\square u = f(x, u(x))$.

2. INTEGRALI SINGOLARI

2.1. Vediamo ora una utilizzazione di tecniche analoghe per la dimostrazione di un risultato di L^2 -continuità per integrali singolari.

Sia $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un operatore lineare continuo. Per il teorema del nucleo di Schwartz, esiste $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ (nucleo distribuzioni di T) tale che $\langle Tf, g \rangle = \langle K, f \otimes g \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ci si domanda allora se sia possibile caratterizzare la (eventuale) L^2 -continuità di T in termini di K . Ci limiteremo al caso in cui K soddisfi le seguenti condizioni (condizioni di Calderon-Zygmund): denotiamo con Δ la diagonale di \mathbb{R}^{2n} $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}; x = y\}$ e poniamo $\Omega = \mathbb{R}^{2n} \setminus \Delta$. Supporremo che:

(*) Cioè $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0)(i\xi_0)^\alpha \neq 0$

esistano $\epsilon \in]0,1]$ e $C > 0$ tali che la restrizione di K a Ω sia una funzione verificante le seguenti proprietà:

$$(2.a) \quad |K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n} \quad \forall (x,y) \in \Omega;$$

$$(2.b) \quad |K(x',y) - K(x,y)| \leq C|x-x'|^\epsilon |x-y|^{-n-\epsilon}$$

$$\forall (x,y), (x',y) \in \Omega \text{ tali che } |x-x'| < \frac{1}{2} |x-y|;$$

$$(2.c) \quad |K(x,y') - K(x,y)| \leq C|y-y'|^\epsilon |x-y|^{-n-\epsilon}$$

$$\forall (x,y), (x,y') \in \Omega \text{ tali che } |y-y'| \leq \frac{1}{2} |x-y|.$$

Ad esempio, se $p \in S_{1,0}^0(\mathbb{R}^n)$, allora il nucleo distribuzioni di $p(x,D)$ dato da $K(x,y) = F^{-1}(p(x,\cdot))(x-y)$, $x,y \in \Omega$, verifica (2.a)-(2.c) con $\epsilon = 1$. Analogamente, se $p \in S_{1,1}^0(\mathbb{R}^n)$ si può verificare che, fuori da Δ , il suo nucleo distribuzioni K verifica la stima

$$|D_x^\alpha D_y^\beta (x,y)| \leq C_{\alpha,\beta} |x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|}$$

e quindi (2.a)-(2.c) con $\epsilon = 1$.

Un esempio invece fuori dell'ambito pseudodifferenziale è il seguente (A.P. Calderon; si veda, ad esempio, [C] e [J]): sia $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione lipschitziana e sia $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$; se $x,y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, poniamo

$$(2.d) \quad K(x,y) = F\left(\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right) \frac{1}{x-y}.$$

È possibile allora associare a K un operatore lineare continuo

$T: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tramite il procedimento usuale di valore principale.

Poniamo cioè $(f,g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$:

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{|x-y| \geq \varepsilon} dx dy K(x,y) g(x) f(y) = \\ &= \frac{1}{2} \iint dx dy K(x,y) (g(x)f(y) - f(x)g(y)), \end{aligned}$$

in quanto $K(x,y) = -K(y,x)$. E' immediato verificare che su Ω K coincide con il nucleo distribuzioni di T e che K verifica (2.a)-(2.c). L'interesse dei nuclei del tipo (2.d) può essere illustrato nel modo seguente. Osserviamo preliminarmente che, se $F \equiv 1$, T è la trasformata di Hilbert. Sia ora γ una curva lipschitziana in \mathbb{C} di parametrizzazione $x \rightarrow x+i g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, dove $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è lipschitziana. Se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, consideriamo l'integrale di Cauchy

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+i\phi'(y)}{z-[y+i\phi(y)]} f(y) dy.$$

Il limite di $G(z)$ quando z tende a $x + i\phi(x)$ da sopra γ e non tangenzialmente (se esiste) è dato da

$$(2.e) \quad \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2\pi i} \text{ v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-y} \left(1+i \frac{\phi(x)-\phi(y)}{x-y}\right)^{-1} f(y) (1+i\phi'(y)) dy$$

e questo integrale è del tipo (2.d), a parte il fattore $1+i\phi'(y)$ che può essere incorporato in f . La connessione di questo tipo di integrali singolari con questioni classiche (in particolare con potenziali di multiplo in domini con frontiera lipschitziana) è illustrato in [M3], [J], [C]. Un caso di particolare interesse di (2.d) è dato da $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(z) = z^k$, $k = 0, 1, \dots$, da un lato perché integrali di questo tipo si presentano sviluppando formalmente in serie l'integrale in (2.e), dall'altro per

ché connessi al "problema dei commutatori" ([C]).

Ricordiamo che la continuità L^2 degli operatori $p(x, D)$ con $p \in S_{1,0}^0$ è contenuta nel teorema di Calderon-Vaillancourt, mentre se $p \in S_{1,1}^0$ non si ha in genere continuità L^2 . La continuità L^2 degli integrali singolari del tipo (2.d) è stata provata recentemente in [C/McI/M] e [C/D/M]. In questa seconda parte del seminario presenterò un risultato recente di G. David e J.L. Journé che caratterizza completamente i nuclei soddisfacenti (2.a)-(2.c) associati a un operatore L^2 -continuo^(*). Si riottengono così i risultati precedenti e si caratterizzano i simboli $p \in S_{1,1}^0$ per cui $p(x, D)$ è L^2 -continuo; in particolare si prova che gli operatori paradifferenziali di ordine zero sono L^2 -continui.

2.1. Premettiamo alcune definizioni.

Definizione 2.1.1. Diremo che $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ appartiene a $BMO(\mathbb{R}^n)$ se $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ e se esiste una costante $C \geq 0$ tale che per ogni sfera $B \subseteq \mathbb{R}^n$ di volume $|B| > 0$ tale che, posto $u_B = |B|^{-1} \int_B u(x) dx$, risulta

$$|B|^{-1} \int_B |u - u_B| dx \leq C.$$

Ovviamente, le funzioni di BMO sono definite modulo le funzioni costanti. Inoltre, se $u \in BMO$, $\int |u(x)|(1+|x|^{n+1})^{-1} dx < +\infty$.

Il ruolo di BMO nello studio degli operatori di Calderon-Zygmund è illustrato dal seguente teorema di Fefferman-Stein ([F/S]).

Teorema 2.1.2. Ogni operatore di Calderon-Zygmund definisce canonicamente una applicazione lineare continua di L^∞ in BMO (per la dimostrazione si veda [F/S] o [C/M], V, Teorema 24).

(*) Chiameremo tali operatori "operatori di Calderon-Zygmund".

In particolare, se T è un operatore di Calderón-Zygmund, $T(1) \in \text{BMO}$. D'altra parte se $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è lineare continuo e il suo nucleo verifica (2.a)-(2.c), è possibile definire canonicamente $T(1)$ (in generale $T(u)$ per $u \in C^\infty \cap L^\infty$) come una forma lineare continua nel sottospazio $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni test ϕ tali che $\int \phi(x) dx = 0$ (si veda [M4] o [M5]) (si osservi che $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$ è un sottospazio denso dello spazio $H^1(\mathbb{R}^n) = ((\text{BMO})(\mathbb{R}^n))^* \text{ (LF/S)}^*(*)$).

Diamo ora la definizione di operatore da \mathcal{D} a \mathcal{D}' di ordine zero.

Definizione 2.1.3. Una applicazione lineare continua

$T: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ verrà detta di ordine zero se per ogni sottoinsieme limitato $B \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ esiste una costante $C = C(B)$ tale che

$\forall u \in \mathbb{R}^n, \forall \delta \in \mathbb{R}, \forall \phi_1, \phi_2 \in B$ si ha

$$(2.1.3.a) \quad | \langle T \phi_1 \left(\frac{x-u}{\delta} \right), \phi_2 \left(\frac{x-u}{\delta} \right) \rangle | \leq C \delta^n.$$

Ad esempio, ogni operatore lineare continuo da L^2 in sé è di ordine zero, perché il primo membro di (2.1.3.a) si maggiora con $\delta^n \|T\| \| \phi_1 \|_{L^2} \| \phi_2 \|_{L^2}$. Invece l'operatore $\frac{\partial}{\partial x_j}$ non è di ordine zero. Se il nucleo distribuzioni K di T verifica (2.a)-(2.c) e di più $K(x,y) = -K(y,x)$, allora T è di ordine zero; infatti, in tal caso, il primo membro di (2.2.3.a) è uguale a

(*) $H^1(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio delle funzioni $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^1} + \sum_{j=1}^n \|R_j f\|_{L^1} < +\infty, \text{ dove } R_j f \text{ è la trasformata di Riesz,}$$

$$\widehat{R_j f}(\xi) = (i \xi_j / |\xi|) \hat{f}(\xi).$$

$$\frac{\delta^n}{2} \left| \iint dx dy \kappa(\delta x+u, \delta y+u)(g(x)f(y) - g(y)f(x)) \right| \leq$$

$$\leq C\delta^n (\max(|\nabla g|+|g|)\max(|\nabla f|+|f|)) \cdot \iint_{U \times U} dx dy |x-y|^{-n+1},$$

dove U è un compatto tale che $\text{supp } f \subseteq U$, $\text{supp } g \subseteq U$.

Osserviamo infine che la sola condizione $K(x,y) = -K(y,x)$ non assicura la L^2 -continuità di T . Il controesempio seguente è dovuto a Y. Meyer ([M4], 1.1).

Sia $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dispari; poniamo

$$K(x,y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i2^k(x+y)} 2^k \psi(2^k(x-y)).$$

Poiché $K(x,y) = -K(y,x)$ e (2.a)-(2.c) sono verificate, l'operatore T può essere definito come valore principale. D'altra parte, se T fosse L^2 -continuo, per il teorema di Fefferman e Stein, risulterebbe

$$\psi(1) \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i2^k x} = T(1) \in \text{BMO},$$

che è vero solamente se $\psi(1) = 0$.

In particolare, dall'esempio precedente segue che un operatore di ordine zero non è necessariamente L^2 -continuo.

2.2. - Teorema 2.2.1. (G. David e J.L. Journé [D/J]). *Sia $T: \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ un operatore lineare continuo il cui nucleo distribuzioni verifica (2.a)-(2.c). Sono allora equivalenti le affermazioni*

(*) T è L^2 -continuo;

(**) $\begin{cases} T(1) \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n) \\ T^*(1) \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n) \\ T \text{ è di ordine zero} \end{cases}$

Per quanto visto precedentemente, (*) implica (**).

Vediamo ora qualche applicazione. Osserviamo per prima cosa che, se $K(x,y) = -K(y,x)$, le tre condizioni di (**) si riducono alla sola $T(1) \in \text{BMO}$. Consideriamo il nucleo (2.d) con $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(z) = z^k$ e sia T_k l'operatore associato. Procediamo ora per induzione su $k \in \mathbb{N}_0$, osservando che T_0 è la trasformata di Hilbert e dunque è L^2 -continuo. D'altra parte, se T_k è L^2 -continuo, dal momento che $A' \in L^\infty(\mathbb{R})$, si ha (per il teorema di Fefferman e Stein)

$$T_{k+1}(1) = T_k(A') \in \text{BMO},$$

e ciò prova che (**) è soddisfatta.

Una stima accurata da poi $\|T_k\| \leq C \|A'\|_{L^\infty}^k$, e quindi, se $\|A'\|_{L^\infty}$ è sufficientemente piccola, la continuità $L^k \rightarrow L^2$ dell'integrale

in (2.e). Questo risultato era stato già ottenuto da A.P. Calderon nel 1977. Osserviamo che la limitazione su $\|A'\|_{L^\infty}$ può essere rimossa grazie a un risultato di G. David ([J], Cap. 8), riottenendo il Teorema di [C/McI/M].

Osserviamo inoltre che le tre condizioni di (**) possono essere sostituite dalle seguenti:

(***) $\begin{cases} \|T(e^{ix\theta})\|_{\text{BMO}} \leq C \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^n \\ T^*(1) \in \text{BMO} \end{cases}$

(si veda, ad esempio, [M4], 1.5). Se allora $\sigma \in S_{1,1}^0(\mathbb{R}^n)$,

$\|\sigma(x,D)e^{i\theta x}\|_{\text{BMO}} = \|\sigma(x,\theta)e^{i\theta x}\|_{\text{BMO}} \leq \|\sigma(x,\theta)e^{i\theta x}\|_{L^\infty} \leq C$. Dunque se $\sigma \in S_{1,1}^0(\mathbb{R}^n)$, $\sigma(x,D)$ è L^2 -continuo se e solo se

$$(\sigma(x,D))^*(1) \in \text{BMO}(\mathbb{R}^n).$$

In particolare, se $\sigma(x,D)$ è un operatore paradifferenziale di Bony, per (1.2.3.b), $(\sigma(x,D))^*(1) = 0$, e quindi tali operatori sono L^2 -continui.

2.3. Accenniamo ora la dimostrazione del Teorema 2.2.1. Osserviamo dapprima che, se $T(1) = T^*(1) = 0$ la continuità L^2 di T può essere provata utilizzando argomenti classici (decomposizione di Littlewood-Paley e lemma di Cotlar-Stein: si veda [D/J] o [M4], 2.3. Una dimostrazione alternativa è in [M5]). Per provare il teorema, basterà allora procedere nel modo seguente: poniamo $T(1) = \beta$, $T^*(1) = \gamma$ e costruiamo due operatori L e N tali che:

- i) $L, N: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sono operatori di Calderon-Lygmund;
- ii) $L(1) = \beta$, $L^*(1) = 0$, $N(1) = 0$, $N^*(1) = \gamma$.

Applicando l'osservazione fatta precedentemente all'operatore $T-L-N$ si conclude la prova del Teorema.

Poniamo $L(u) = \tilde{\Pi}(u, \beta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k(\beta) S_{k-2}(u)$; una conseguenza di [F/S] (si veda anche [C/M], VI) è che L è L^2 -continua, in quanto

$$\|\tilde{\Pi}(u, \beta)\|_{L^2} \leq C \|\beta\|_{\text{BMO}} \|u\|_{L^2}.$$

Osserviamo ora che $\|\Delta_k(\beta)\|_{L^\infty} \leq C\|\beta\|_{BMO} \quad \forall k$. Infatti

$$|\beta_k(x)| = \left| \int dy [2^{n(k+1)} \chi_{\phi(2^{k+1}(x-y))} - 2^{kn} \chi_{\phi(2^k(x-y))}] \beta(y) \right| \leq \\ \leq C_n \left\| 2^{n(k+1)} \chi_{\phi(2^{k+1}(x-y))} - 2^{kn} \chi_{\phi(2^k(x-y))} \right\|_{H^1(y)} \|\beta\|_{BMO} \leq C_{n,\phi} \|\beta\|_{BMO}.$$

Infatti, denotando con R_j la j -ma trasformata di Riesz, risulta

$$\|R_j(2^{n(k+1)} \chi_{\phi(2^{k+1}(x-y))} - 2^{kn} \chi_{\phi(2^k(x-y))})\|_{L^1} = \|R_j(2^n \chi_{\phi(2x-\phi(x))})\|_{L^1} = C_{n,\phi},$$

in quanto $x \rightarrow 2^n \chi_{\phi(2x-\phi(x))} - g(x)$ appartiene a S e ha integrale nullo e quindi appartiene ad H^1 . Analogamente anche la norma L^1 di $2^{n(k+1)} \chi_{\phi(2^{k+1}(x-y))} - 2^{kn} \chi_{\phi(2^k(x-y))}$ è indipendente da k e da x .

Osserviamo anche che per la disuguaglianza di Bernstein risulta

$$\|D^\alpha \Delta_k(\beta)\|_{L^\infty} \leq C_n^{2^{k|\alpha|}} \|\Delta_k(\beta)\|_{L^\infty} \leq C_{n,\phi}^{2^{k|\alpha|}} \|\beta\|_{BMO}.$$

E' immediato allora verificare che per $x \neq y$ il nucleo distribuzioni di L è dato da

$$L(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_k(\beta)(x) 2^{(k-2)n} \chi_{\phi(2^{k-2}(x-y))}$$

(la serie converge assolutamente per $x \neq y$).

E' possibile inoltre provare che (2.a), (2.b), (2.c) sono soddisfatte ($\epsilon = 1$). Risulta evidentemente $L(1) = \beta$. Poiché poi

$\text{supp}\{\phi(\frac{\xi}{2^{k+1}}) - \phi(\frac{\xi}{2^k})\} \cap \text{supp}\phi(\frac{\xi}{2^{k-2}}) = \emptyset$, risulta $\int dx \Delta_k(\beta)(x) S_k(\psi)(x) = 0$ per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, e quindi $L^*(1) = 0$. La costruzione di L è così completa.

ta. La costruzione di N è analoga.

Osserviamo per concludere che il Teorema 2.2.1 ha un analogo negli spazi di natura omogenea.

BIBLIOGRAFIA

- [B1] J.M. BONY, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, (4) 14 (1981), 209-246.
- [B2] _____ Interaction des singularités pour les équations de Klein-Gordon non linéaires, *Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983/84*, Exposé n. 10.
- [B/R 1] M. BEALS e M. REED, Propagation of singularities for hyperbolic pseudodifferential operators with nonsmooth coefficients, *Comm. Pure Appl. Math.*, 35 (1982), 169-184.
- [B/R 2] _____ Microlocal regularity theorems for nonsmooth pseudodifferential operators and applications to nonlinear problems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 285 (1984), 159-184.
- [C] A.P. CALDERON, Commutators, Singular Integrals on Lipschitz Curves and Applications, *Proc. of the I.C.M. Helsinki* (1978).
- [C/M] R.R. COIFMAN e Y. MEYER, Au delà des opérateurs pseudo-différentiels, *Astérisque* 57 (1978).
- [C/McI/M] R.R. COIFMAN, A. Mc INTOSH, Y. MEYER, L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes, *Ann. of Math.*, 116 (1982), 361-388.

- [C/D/M] R.R. COIFMAN, G. DAVID e Y. MEYER, La solution des conjectures de Calderon, *Advances in Math.*, 48 (1983), 144-148.
- [D/J] G. DAVID e J.L. JOURNE, Une caractérisation des opérateurs integraux singuliers bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, *C.R. Acad Sc. Paris*, 296 (1983), Sér. I, 761-764.
- [F/S] C. FEFFERMAN e E.M. STEIN, H^p Spaces of Several Variables, *Acta Math.*, 129 (1972), 137-193.
- [J] J.L. JOURNE, Calderon-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Caldéron, *Lecture Notes in Mathematics*, 994, Springer 1983.
- [M/R] R. MÉLROSE e N. RITTER, Interaction of nonlinear progressing waves for semilinear wave equations, *Ann. of Math.*, 120 (1984).
- [M1] Y. MEYER, Remarques sur un théorème de J.M. Bony, *Suppl. Rend. Circolo mat. Palermo* (2) 1 (1981), 1-20.
- _____ Nouvelles estimations pour les solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires, *Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz 1981/82*, Exposé n. 6.
- [M3] _____ Théorie du potentiel dans les domaines lipschitziens d'après G.C. Verchota, *Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz 1982-83*, Exposé n.

- [M4] _____ Lemme de Cotlar, Opérateurs définis par des intégrales singulières et applications aux équations aux dérivées partielles, Monografias de Matematicas III, Universidad autonoma de Madrid, 1983.
- [M5] _____ Continuité sur les espaces de Hölder et de Sobolev des opérateurs définis par des intégrales singulières, Sem. Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983/84, Exposé n. 1.
- [ME] G. METIVIER, Intégrales Singulières, Université de Rennes D.E.A. 1981/82.
- [ST] M. SABLE-TOUGERON, Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non linéaires, 1984.